**Условие:** У некоторого здания есть очень длинная крыша, расположенная под углом к горизонту. На нее начинает капать мелкий дождь, причем капли движутся вертикально вниз с постоянной скоростью. Найдите ускорение потока жидкости в зависимости от расстояния до карниза крыши в двух предельных случаях: а) ; б) . Предполагается, что концентрация воды в воздухе всюду одинакова, а вода не стекает с краев крыши. Трением внутри воды и между водой и крышей пренебречь. Соударение капель воды с крышей абсолютно неупругое.

**Решение:** Пусть – относительная концентрация воды в воздухе (т.е. отношение объема, занимаемого водой, ко всему объему, ); – горизонтальная ширина крыши (см. рисунки), – скорость капель дождя; – плотность воды. Выделим на некотором расстоянии от карниза малый объем . Пусть его высота , а скорость воды в нем . Тогда его длина равна . Имеем уравнение:

.

Продифференцировав это уравнение по времени, получим:

где штрих означает производную по времени.

Физический смысл величины – это приращение объема вследствие поглощения потоком атмосферной воды. Считая, что угол наклона поверхности воды мало отличается от (такое возможно при ), получаем, что эффективная площадь, на которую падает дождь, . Тогда изменение объема воды .

Сравнив выражения для , получим:

. (1)

Применим теперь второй закон Ньютона к выделенному объему. Его масса , приращение . На выделенный объем действуют только сила тяжести и сила нормальной реакция опоры. Запишем второй закон Ньютона в дифференциальной форме в проекции на направление движения воды:

.

Последнее слагаемое в уравнении отвечает за то, что приращенную массу необходимо разогнать от скорости до скорости .

Подставив значения масс и проделав несложные преобразования, получим:

,

откуда

. (2)

Получили два дифференциальных уравнения. Рассмотрим теперь предельные случаи.

а) . Очевидно, что тогда . Подставив это в уравнение (1), получим:

,

откуда

.

Рассмотрим теперь правую сторону выражения (2). В нем есть отношение малых величин . Заменим отношение этих величин на отношения их производных по правилу Лопиталя:

Подставим это в уравнение (2):

откуда

б) . Пусть в этом случае установившееся ускорение , тогда скорость , где – время движения воды. Это оправдано, так как участок приобретения водой установившегося ускорения намного меньше дальнейшего пути. Пусть , тогда . Подставим в уравнение (1):

,

откуда

Тогда . Так как , то . Подставим в (2):

откуда

**Ответ:** а) ; б) .